

Matematyka obliczeniowa: kolokwium 09.04.2025 (120 minut)

Kolokwium składa się z czterech zadań. Zadanie 1 znajduje się na drugiej kartce. Wszystkie zadania są jednakowo punktowane. Proszę każde zadanie rozwiązywać na osobnej kartce, podpisanej imieniem i nazwiskiem.

Na ocenę wpływa nie tylko poprawność wyników, ale także ich precyzyjne uzasadnienie. M.in., wykorzystywane fakty pochodzące ze źródeł zewnętrznych należy udowodnić. Jeśli nie powiedziano inaczej zakładamy, że używana jest arytmetyka dokładna, a koszt oznacza liczbę flopów.

POWODZENIA!

Zadanie 2. Podaj algorytm o koszcie $O(N)$, który za pomocą mnożenia przez pewne macierze ortogonalne sprowadzi trójdziagonalną macierz nieosobliwą

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & & & \\ c_2 & a_2 & b_2 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & c_{N-1} & a_{N-1} & b_{N-1} \\ & & & c_N & a_N \end{bmatrix}$$

do postaci górnej trójkątnej. Przyjmij, że diagonale macierzy A są przechowywane w trzech wektorach, $[a_1, \dots, a_N]$, $[b_1, \dots, b_N]$, $[c_1, \dots, c_N]$.

Zadanie 3. Dany jest rozkład $A = V^T D V$ kwadratowej macierzy $A \in \mathbb{R}^{N \times N}$, pełnego rzędu, w którym $V \in \mathbb{R}^{N \times N}$ spełnia $V^T V = I$, natomiast $D \in \mathbb{R}^{N \times N}$ jest diagonalna. Zaproponuj algorytm rozwiązywania LZNK

$$\|b - Ax\|_2 \rightarrow \min_x$$

kosztem $O(N^2)$.

Zadanie 4. Niech A będzie zadaną symetryczną macierzą rzeczywistą $N \times N$, o której wartościach własnych wiadomo jedynie, że $|\lambda_1| > |\lambda_2| > \dots > |\lambda_N|$. Załóżmy też, że dany jest wektor własny v_1 , odpowiadający λ_1 , taki, że $\|v_1\|_2 = 1$. Wykaż, że jeśli x_0 nie jest prostopadły do wektora własnego v_2 odpowiadającego λ_2 , to metoda iteracyjna

```
for  $k = 0, 1, \dots$ 
     $y = Ax_k$ 
     $z = y - v_1(v_1^T y)$ 
     $x_{k+1} = z / \|z\|_2$ 
end
```

generuje ciąg wektorów $\{x_k\}$, których kierunek jest zbieżny do kierunku wektora v_2 .